Title	ぢをふぁんたす近似論ニ於ケル最近ノ研究（第三報）
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 197 p.176-p.182
Issue Date	1940-05-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74785
rights	
Note	

855. ぢをふあんたす近似論ニ於ケル最近ノ研究（第三報）

武隈　良一（北海道室蘭中學）

はじめに

第一報ハ東京物理學校雜誌第５７２号（昭和十四年七月号）ニ掲載サレ其ノ内容ハ次ノ通リデアリマス。

1. Hurwitz ノ定理ノ二次虚數体ニ於ケル擴張.

2. 非同次一次式ノ絶對値ノ大キサニ就テ.

3. n 個ノ非同次一次式ノ不定近似.

第二報ハ日本中等教育數學會雜誌第二十一巻第六号（昭和十四年十二月発行）ニ掲載サレ其ノ内容ハ Mordell ノ問題ヲ論ジタモノデアリマス。以下其ノ後ノ発展並ビニ既報ニ洩レタ重要事項ヲ述ベサセテ頂キマス。

× × × × × × ×

1. Kronecker ノ定理ノ証明

コヽニ Kronecker ノ定理トイフノハ次ノ有名ナ定理ヲサス。

定理. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_N$ ガ一次的ニ独立ナ實數ナルトキ, $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots \phi_N$ ヲ任意ノ實數, ε ヲ任意ニ小ナル正數トスルトキ, 適當ニ實數 t, 整數 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_N$ ヲ見出シテ

$$|\lambda_n t - \phi_n - A_n| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots N)$$

ナラシメル事ガ出來ル。

コノ定理ノ証明ハ非常ニ多クアルト聞イテマスガ以下ノ論文ニ示サレタ以外ニ興味深キモノガアルデセウカ、若シアッタナラバ御教示ヲ仰ギタイト思ヒマス。

1. Weyl. Math. Annalen 77 (1916) 331 — 352
2. Bohr. Proc. Lon. Math. Soc. (2) 21 (1922) 315 — 316.
3. Lettenmeyer. 同上 306 — 314.
4. Bohr ト Jensen. Journal London Math. Soc. 7 (1932) 274 — 275.
5. Estermann. 仝上 8 (1933) 18 — 20.
6. Bohr. 仝上 9 (1934).

2. Oppenheim ノ定理

二次虚数体$k(\sqrt{-m})$ニ於テmが與ヘラレタトキ任意ノ複素數 α ニ對シテ

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

ヲ滿足スル數体$k(\sqrt{-m})$ノ整數$p,\ q\ (\neq 0)$ノ組ガ無限ニ存在スルタメ且ツソレニ反シアル複素數βニ對シテ

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma-\varepsilon}{|q|^2} \qquad (\varepsilon>0)$$

ガ有限個シカ組ヲ持タナイタメニハγヲ如何ニ定ムベキカトイフ問題ニ對シテハ既ニ第一報第一章ニ於テNikolausガ結論ヲ與ヘテ居ルガ其ノ後OppenheimハMh. Math Phys. 46, 196 (1937) ニ於テ次ノ如ク拡張シテ居ル。

定理

$m \equiv 3 \pmod{4}$ ナルトキ $\mu=\frac{1}{2}$

$m \not\equiv 3 \pmod{4}$ ナルトキ $\mu=1$

トセバ

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\sqrt{\frac{\mu^2 m}{2}}}{|q|^2}$$

ヲ滿足スル數体$k(\sqrt{-m})$ノ整數$p,\ q$ノ組ハ無限ニ存在スル。

證明ハ二次形式論ノ定理ニヨル。

3. 三ツノ一次同次式ノ積

例ヘバ $|ax^2+2hxy+by^2|$ ヲ x, y ノ 0 デナイ整數値ニ對シテナルベク小ナラシムルコトトイフ二次ノ問題ニ就テハ次ノ諸定理ガアル。

定理1. $\Delta = ab-h^2>0$ ナルトキ

$$|ax^2+2hxy+by^2| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\Delta}$$

ナラシムル x, y ノ整數値ガ存在スル。

定理2. $\Delta = ab-h^2<0$ ナルトキ

$$|ax^2+2hxy+by^2| \leqq 2\sqrt{\frac{\Delta}{5}}$$

ナラシムル x, y ノ整數値ガ存在スル。

定理3. (Minkowski)

$$|(ax+by+c)(a'x+b'y+c)| \leqq \frac{|ab'-a'b|}{4}$$

ナラシムル x, y ノ整數値ノ組ハ無數ニアル。

コノ Minkowski ノ定理ノ証明ハ彼ノ著書 Diophantische Approximationen 45頁ニアルガ最近 Askar ガ Math. Annalen 115 (1938) ニ於テ新シイ証明ヲ與ヘテ居ル。

サテ二次ノ問題ハソノ性質上一次ノ問題ト甚ダ類似シテ居ルガ三次以上ノ場合トナルト特殊ナ困難ヲ伴ツテ來ル。ソノ三次ノ場合ニ對シテ Davenport ガ Journal London Math. Soc. 13 (1938) ニ於テイササカ解決ヲ與ヘテ居ルノヲ以下ニ述ベヤウト思フ。

今ξ, η, ζハx, y, zニ關スル一次同次式ヲ表ハス
モノトシソノ行列式ノ値ハ1ナリトス。x, y, zガ全部ハ0
デナイ整數ナルトキ

$$M = \min|\xi\eta\zeta| \text{ ………………… } (1)$$

トオケバ Minkowski ノ結果*

$$\min(|\xi|+|\eta|+|\zeta|) \leqq 3\left(\frac{4}{19}\right)^{\frac{1}{3}} \text{……} (2)$$

ニヨリ $M \leqq \frac{4}{19}\left(=\frac{1}{4.75}\right)$ ………………… (3)

ナルコトハ良ク知ラレテルコトデアル。

Davenport ハ

$$M \leqq 8\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)^{-2} = \frac{1}{6.07} \text{ ……} (4)$$

ナルコトヲ証明シタノデアル。ソノ為ニ次ノ Lemma ヲ先
ヅ証明シソレヲ用ヒタノデアル。

Lemma

$$\min_{u,v>0}\left\{u+v+\max\left(\frac{1}{uv}, \frac{1}{|(u-1)(v-1)|}-1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right) = 3.484 \text{ ……}$$

Lemma ノ証明ハ省キ直チニ Davenport ノ定理ノ
証明ニ入ラウ。

先ヅ任意ニ小ナル正數εニ對シテ

$$M \leqq |\xi_0\eta_0\zeta_0| < M(1+\varepsilon)$$

ヲ満足スル如キξ, η, ζノ値$\xi_0\eta_0\zeta_0$が存在スル。但シ$x, y,$

---

*) 彼ノ全集第二巻3—42ヲ見ヨ。

ヲノ整數値ハ全部ハ0デナイトス。今

$$P=|\xi_0\eta_0\zeta_0|^{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(5)$$

トスルトキ ξ,η,ζ ヲ $\dfrac{\xi P}{|\xi_0|}$, $\dfrac{\eta P}{|\eta_0|}$, $\dfrac{\zeta P}{|\zeta_0|}$ ニヨッテ置換出來ルカラ

$$|\xi_0|=|\eta_0|=|\zeta_0|=P$$

トオイテモ一般性ハ失ハレナイ。從ッテPハ

$$M\leqq P^3<M(1+\varepsilon)$$

ヲ滿足スル。サテ

$$|\xi|+|\eta|+|\zeta|$$

ヲ考ヘヤウ。コノ式ガ正ノ極小値ヲトルトキノ格子點ヲ (x_1,y_1,z_1) トシ又 (x_2,y_2,z_2) ハ $(0,0,0)$ ト (x_1,y_1,z_1) ト共ニ一直線上ニナイ點トシコノ制限ノ下ニソノ點ニ於テ上式ハ極小値ヲトルモノトス。次ニ (x_3,y_3,z_3) ハ $(0,0,0)$ (x_1,y_1,z_1) (x_2,y_2,z_2) ト共ニ同一平面上ニナイ點トシ，コノ制限ノ下ニソノ點ニ於テ上式ハ極小値ヲトルモノトス。

ξ_i,η_i,ζ_i ヲ x_i,y_i,z_i ニ對應スル ξ,η,ζ ノ値トシ

$$3S_i=|\xi_i|+|\eta_i|+|\zeta_i|$$

トセバ Minkowski ノ定理*ニヨリ

$$(3S_1)(3S_2)(3S_3)J\leqq 8 \qquad \cdots\cdots(6)$$

ナリ。茲ニJハ八面体 $|\xi|+|\eta|+|\zeta|\leqq 1$ ノ体積デアル。

---

* 彼ノ著書 Geometrie der Zahlen (1910) 第五章ヲ見ヨ。

$J=\frac{8}{6}$ ナル故特ニ

$$S_1 S_2^2 \leqq \frac{2}{9} \qquad \cdots\cdots (7)$$

トナル。従テ算術及ビ幾何平均ノ不等式ニヨリ

$$M \leqq S_1^3$$

トナル。(ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) ノ少クトモ一ツハ (ξ_0, η_0, ζ_0) $(-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0)$ トハ相異ナッテ居ル。今 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \neq (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ トシテモ一般性ハ失ハレナイカラ ξ_0, ξ_i ハ同符号, η_0, η_i ハ同符号トナル。茲ニ i ハ 1 又ハ 2 デアル。次ニ $\xi_i-\xi_0$, $\eta_i-\eta_0$, $\zeta_i-\zeta_0$ ハ x, y, z ノ全部ガ 0 デナイ整数ナルトキノ ξ, η, ζ ノ値ナル故

$$|(\xi_i-\xi_0)(\eta_i-\eta_0)(\zeta_i-\zeta_0)| \geqq M$$

従テ
$$|(|\xi_i|-P)(|\eta_i|-P)(|\zeta_i|+P)| \geqq M$$

トナル，今

$$u=\frac{|\xi_i|}{P}, \quad v=\frac{|\eta_i|}{P}, \quad w=\frac{|\zeta_i|}{P}$$

トセバ
$$uvw \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$|(u-1)(v-1)|(w+1) \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$u+v+w=\frac{3S_i}{P} \leqq \frac{3S_2}{M^{\frac{1}{3}}}$$

$$\leqq \frac{3}{M^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{S_1^{\frac{1}{2}}} \leqq 3\,\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}$$

ε ハ任意ニ小ナル正數ナルヲ以テ Lemma ニヨリ

$$3\,\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \geqq \min_{u,v>0}\left\{u+v+\max\left(\frac{1}{uv},\ \frac{1}{|(u-1)(v-1)|}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)$$

コレヨリ定理ノ結果ヲ得。

4. 和算ニ於ケル不定近似

和算ニ於テモぢをふあんたす近似論ガ論ジラレテ居ッタトノ發見ガ近頃藤原博士ニヨッテナサレマシタ。ソレハ建部賢弘著ノ累約術デアッテ次ノ三問題ヲ論ジラレルトノコトデス。

1) $|x-\alpha y|<\varepsilon$

2) $|x-\alpha y+\beta|<\varepsilon$

3) $|x-\alpha y-\beta|<\varepsilon$

α, β ハ實數，x, y ハ整數．

實ニ關孝和ノ行列式ト共ニコノ建部賢弘ノ累約術ハ日本數学ノ世界ニ誇ルニ足ルモノデアリマス。詳細ハ次ノ諸雜誌ヲ參照サレタイ。

1. 大塚數學會誌（15年1月号）
2. Proceeding of the Imperial Academy 第15巻第5号（1939）

（以上）